

Análisis y simulación fractal de medios graníticos

Scaling in granitic geological media

C. Paredes (*), E. Chacón (*) y Fco. J. Elorza (*)

(*) Depto. de Matemática Aplicada y Métodos Informáticos. E.T.S.I. de Minas. Madrid 28003. (Spain)

ABSTRACT

It's easy to appreciate that the fracture field creates a tortuous pipe networks. Such nets usually have an scaling or fractal structure, in most of the cases studied, and some spatial distribution properties which allow us to characterize them as fractals. This hard task is made to simulate the hidrogeological behaviour in the fractured media. Really, the problem arises when one wants to do a fractal characterization and simulation both related. That's the problem dealt in this work. Two different ways of analyses (an Inverse Box-Counting Method MIBC, and an aggregation mass algorithm) related with two fractal simulation methodologies, to describe and simulate the fractality in fracture nets, are exposed, and showed with an example which uses the El Berrocal data base.

Key words: fractal analysis, fractal simulation, fracture distribution, granitic media

Geogaceta, 20 (6) (1996), 1405-1408
ISSN:0213683X

Introducción

Los medios rocosos fracturados, y por lo tanto los campos de fracturas que poseen, son susceptibles de ser estudiados como tales fractales. Ya en los primeros análisis de Jacquin y Adler (1987), o de Sahimi y Imdakm (1988), se analiza esta posibilidad, incluso se pretenden estudiar como redes de percolación, lo cual permite utilizar esta teoría para comprender algunos de los comportamientos dinámicos. Pero en este trabajo el medio es analizado en su estructura como en Walsh y Watterson (1993), o como se propone en Paredes (1995) para su posterior simulación. Mostraremos cómo mediante la geometría fractal es posible estudiarlos, y definir un modelo conceptual para simularlos, que sea acorde con el análisis efectuado.

Técnicas de análisis fractal de una red de fracturación

Una gran parte de los trabajos, que pretenden relacionar los medios fracturados con la geometría fractal, se limitan a realizar un estudio exhaustivo de sus propiedades con la escala, como en Jacquin y Adler (1987) ó en Korvin (1992), donde se aplican técnicas clásicas sin tener en cuenta cuál puede ser la utilidad de sus resultados, únicamente para la caracterización mediante la dimensión fractal de la red de fracturación observada en superficie. Estos análisis suelen estar realizados aplicando técnicas de conteo sencillas, Aviles *et al.* (1987), Dersowitz *et al.* (1992), aunque costosas de implementar algorítmicamente. Inicialmente ciertos análisis unidimensionales han sido ya presentados, por ejemplo en Gumiel *et al.* (1992). Pero en dos dimensiones estos proporcionan unos resultados que

no son del todo correctos ya que, por ejemplo, cuando se determina la dimensión fractal de box-counting, Mandelbrot (1986), Feder (1988), Falconer (1990), mediante el estudio del número $N(\epsilon)$ de conjuntos de tamaño que recubren F , cuando:

$$N(\epsilon) \propto \epsilon^{-D}$$

el resultado proporciona una medida de la densidad que no es invariante al cambio de escala, Stoyan y Stoyan (1994). De hecho, el conteo de celdas ocupadas por al menos una parte del fractal F (o del sistema fracturado en su caso), que se está analizando, debe de ser ponderado por la masa que posee cada celda en su interior. Esto es, por el número de pixels, por la longitud de fracturas, por el área abarcada, etc. Dicho peso permite determinar la información que se necesita para especificar una parte del fractal a la escala más pequeña en estudio. El peso p_i para cada celda i se calcula como la relación entre la medida invariante en la celda i y la medida de todo el sistema F a analizar, que se encuentra embebido en un espacio E , normalmente $E \subset \mathbb{R}^n$:

$$p_i = \mu(F) / \mu(F)_i$$

Esta forma de proceder ha sido también discutida en Walsh y Watterson (1993), donde se manifiestan las incorrecciones a la hora de utilizar box-counting, y por lo tanto cómo debe de ser corregido este, para una correcta interpretación. La obtención de la información de la estructura, se realiza mediante el cálculo del sumatorio para todas las celdas que poseen algún elemento de F , de la información de cada celda, como:

$$I(\epsilon) = - \sum_{j=1}^{N(\epsilon)} p_j \cdot \log p_j$$

para el que el cálculo de $N(\epsilon)$ se realiza mediante la técnica descrita de box-counting, en función de la escala ϵ . La información, en el caso de variar de forma poten-

cial, posee una dimensión fractal asociada, Falconer (1990), denominada dimensión fractal de información D_I , que se determina según:

$$D_I = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sum_{j=1}^{N(\epsilon)} p_j \cdot \log p_j}{\log \epsilon}$$

Mediante esta definición de dimensión, se es capaz de caracterizar de una manera más apropiada la estructura de la red de fracturación que, mediante solo la dimensión de recubrimiento.

Otra de las formas de analizar esta distribución de masa (de las rectas o fracturas) en E es mediante la función $M(r)$, que determina la masa contenida dentro de una bola de radio r y de centro un punto x de E , tal que $F \subset E$. Dicho interés se encuentra en determinar cuales don los intervalos de valores de r para los que $M(r)$ se comporta según una ley de tipo fractal: $M(r) \propto r^{D_A}$ y por lo tanto se puede determinar la dimensión fractal de agregación D_A como el exponente de $M(r)$ dentro de dicho intervalo. Esta dimensión da idea de la conectividad al aumentar la escala (denotada en este caso como r) de las fracturas, se pueden descubrir escalas de diferentes estructuras por diferencias de comportamiento. Así mismo, es posible analizar la correlación entre los resultados obtenidos del análisis y la ley propuesta para el comportamiento fractal. La función de correlación así obtenida se denomina función de lacunaridad $L(r)$:

$$L(r) = \frac{\langle M(r)^2 \rangle - \langle M(r) \rangle^2}{\langle M(r) \rangle}$$

Esta función, además del interés mencionado, permite saber para qué escalas la estructura posee huecos, falta de materia, lagunas en la distribución, de ahí su nombre.

Simulación fractal de una red de fracturación

De entre los primeros trabajos de análisis realizados para la posterior simulación hay que resaltar los de Thomas (1987) en los que pretende simular un campo de fracturas, como planos infinitos irregulares, mediante un movimiento browniano fraccionario. Este método se encuentra precedido de un breve estudio mecánico del porqué de la irregularidad de las fracturas, pero posee poca utilidad ya que se limita a escalas muy locales. Otros como los de Chiles (1989), aunque se amplía la escala de la simulación, simplemente mencionan la posibilidad de utilizar técnicas fractales. Y finalmente, de los más recientes, y que pueden encontrarse implementados en códigos comerciales, Dersowitz *et al.* (1992), el análisis (que no completo) de la red de fracturación no produce unos resultados que sean directamente utilizables para la posterior simulación del campo de fracturas.

Es por ello, por lo que este análisis debe de diferenciarse del anterior en que no se pretende caracterizar la red de fracturación, sino proporcionar los datos necesarios para efectuar una simulación acorde con el comportamiento observado en el estudio, que en este caso se efectuará aplicando técnicas de simulación fractal de medios fracturados. La simulación de estos medios suele llevarse a cabo en tres líneas separadas que se fusionan en su representación. La primera corresponde con la simulación del proceso espacial de puntos que sirven de soporte a los planos que equivalen a las fracturas. Habitualmente este proceso corresponde a uno de Poisson de densidad no homogénea, y que en el caso que se está aplicando se va a realizar de forma fractal. Un segundo paso consiste en asignar un tamaño, siguiendo una función de distribución obtenida a partir de los datos medidos en campo, según el análisis, una distribución log-Normal, a los radios de los planos. Este tamaño corresponde con el diámetro de la figura plana poliédrica acotada que define un plano de fractura finito. Finalmente en la última línea, se asigna a cada plano o fractura sintética las componentes de orientación, las cuales suelen registrarse por unas funciones de distribución tridimensionales esféricas (siendo la más usuales Fisher, Bingham, Fisher-bivarada, etc.).

Dos procesos fractales de puntos para la simulación

Clásicamente este proceso se realizaba mediante técnicas de generación de procesos de Poisson, o de Gibbs, Stoyan y Stoyan (1994). Pero en el caso de que, mediante el análisis efectuado, se describa la nube de puntos del medio real como una estructura con propiedades fractales, deben de aplicarse unas técnicas que generen esta distribución. Para ello, se han puesto a punto dos técnicas diferentes los cuales se

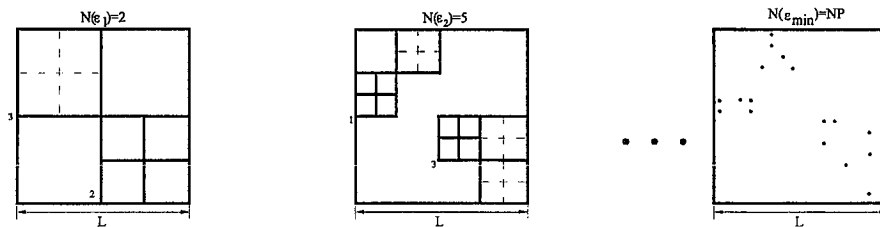


Fig. 1.- Proceso iterativo general del método Box, Paredes (1995)

Fig. 1.- General Box iterative process, Paredes (1995)

fundamentan en una metodología iterativa de refinamiento y desrefinamiento de la escala. Ambas técnicas se basan en las propiedades de cambio del número de elementos N(ε) del fractal F, y de su distribución de masa M(r).

Método Box.: Se trata de un proceso de puntos según la ley potencia (1) verificándose que cuando los conjuntos {U_i}^{N(ε)} que forman el recubrimiento del fractal F, que se encuentra dentro de un dominio E ⊂ ℝⁿ tiene un diámetro que verifica, Paredes (1995):

$$\begin{cases} diam(U_i) = diam(E) = \epsilon_{max} \Leftrightarrow N(\epsilon_{max}) = 1 \\ diam(U_i) = \epsilon_{min} \Leftrightarrow N(\epsilon_{min}) = Car(F) = NP \end{cases}$$

El proceso iterativo consiste en tomar tantas celdas N(ε) como corresponde a la escala, según:

$N(\epsilon_{i+1}) = L^D \cdot \epsilon_{i, NP}^{D-p}$
e iterativamente se va refinando la escala de tal manera que:

$$\epsilon_{i+1} = \epsilon_i / 2 = L / 2^i$$

como se muestra en la figura 1. El número de iteraciones se determina a partir del número de puntos NP, de la dimensión L del dominio donde se simula, y de la dimensión fractal de recubrimiento D de la nube a simular.

Método Radial: Igualmente a la técnica iterativa anterior, se determina el número de puntos a situar en el espacio, pero en este caso Paredes (1995) la ubicación se realiza sobre una corona circular, (ó esférica en el

caso 3D), siguiendo la ley de distribución de masa M(r) (5) verificándose:

$$M(r) = B \cdot r^{Dn}; B = \frac{NP}{(r_{max})^{Dn}}$$

dependiendo de la forma de llevar a cabo el proceso, se han definido dos técnicas diferentes para el mismo método. La denominada Radial-Unitario, en la que se genera un punto en cada nueva corona en cada iteración, con lo que hay que determinar el tamaño de la corona en la que se sitúan el nuevo y único punto. Este se calcula según:

$$r_{i+1} = 10^{\left(\frac{\log(r_{max}^{Dn} \cdot B^{-1})}{Dn}\right)}$$

Y, en segundo lugar, la denominada Radial-Equidistante, con la que se generan tantos puntos proporcionalmente al área (ó volumen) que abarque la corona. Tomándose un número de coronas NB fijo, entonces:

$$\Delta r = \frac{r_{max} - r_{min}}{NB}; r_{i+1} = r_i + \Delta r; \Delta M(r) = B \cdot (r_{i+1}^{Dn} - r_i^{Dn})$$

Aplicación al caso de El Berrocal

La finca de El berrocal se encuentra situada próxima al pueblo de Nombela, pequeño pueblo próximo a Maqueda (provincia de Toledo), a unos 90 Km. de Madrid hacia el SW. Ubicada sobre la cadena montañosa de la Sierra de Gredos, se constituye fundamentalmente por un plutón granítico del Hercínico tardío, intruido éste en unas granodioritas más antiguas, Campos *et al.* (1995).

Con el estudio de este ejemplo se pre-

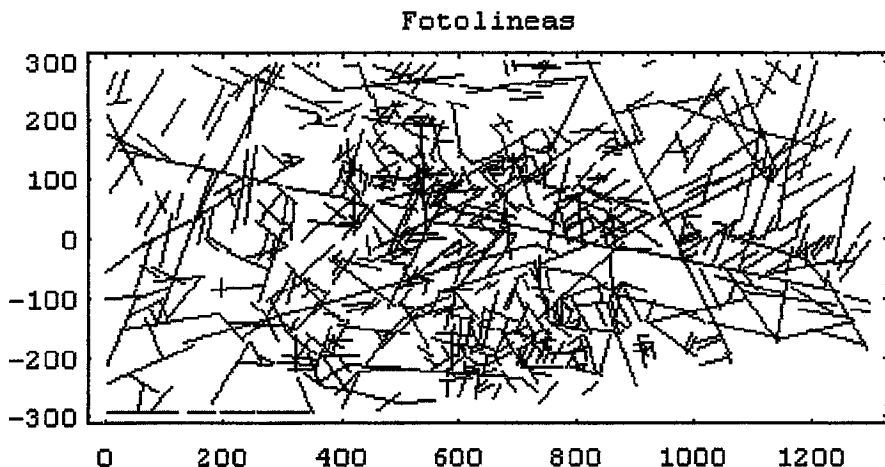


Fig. 2.- Fotolíneas interpretadas en un área de 1'5 Km. x 0'8 Km., CIEMAT (1995)

Fig. 2.- Aerial photo interpretation in the El Berrocal site, CIEMAT (1995)

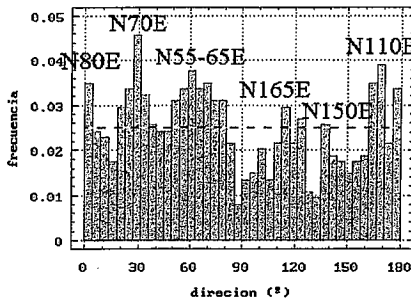


Fig. 3.- Histograma frecuencial de las direcciones de las fotolíneas

Fig. 3.- Photoline direction frequency histogram

Tamaño de la muestra $n = 744$
 Valor mínimo = $0'05^\circ$
 Valor máximo = $179'97^\circ$
 Rango = $179'91^\circ$
 Media $\mu = 84'51^\circ$
 Mediana = $75'02^\circ$
 Moda = $178'87^\circ$
 Media Geométrica $\mu_G = 59'08^\circ$
 Varianza $\sigma^2 = 2872'69$

Tabla I.- Estadística de los datos de direcciones.

Table I.- Statistic from directional data

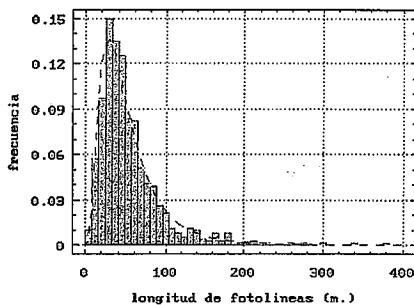


Fig. 4.- Histograma frecuencial de las dimensiones de las fotolíneas

Fig. 4.- Photoline Length frequency histogram

Tamaño de la muestra $n = 744$
 Valor mínimo = $4'623$ m.
 Valor máximo = $628'525$ m.
 Rango = $623'901$ m.
 Media $\mu = 55'54$ m.
 Mediana = $42'80$ m.
 Moda = $43'68$ m.
 Media Geométrica $\mu_G = 43'68$ m.
 Varianza $\sigma^2 = 2485'91$ m².

Tabla II.- Estadística de los datos de dimensiones

Table II.- Statistic from dimensional data

tende exponer cómo es posible, primero identificar la estructura fractal de la red de fracturación observada (Fig. 2), y entre qué escalas se desarrolla ésta. Segundo, con qué cantidad de información contamos de esta estructura, y si es ésta suficiente, ó si, por el contrario, al ser muy irregular, se precisa de más información. Y, finalmente tercero, cómo debe de realizarse el análisis si lo que se pretende es generar una serie de medios fracturados sintéticos que respondan a las características fractales en distribución de las fracturas en el espacio, siguiendo una técnica de simulación basada en procesos de puntos, según las dos metodologías Box y Radial expuestas anteriormente.

Análisis de la red de fracturación

Igualmente, la distribución de las direcciones de fracturación medidas a través de la foto interpretación, presentan una distribución en direcciones muy semejante a la medida en campañas de campo y sonda TLV, Campos *et al.*, (1995). Esta misma distribución ha sido obtenida a partir de 744 fotolíneas (figura 2), las cuales quedan recogidas en la figura 5 en una extensión de $1'2$ km². El resultado obtenido se presenta en la figura 3, donde se señalan las anteriores direcciones señaladas en las campañas de campo, y su frecuencia asociada. Así mismo, es posible determinar la función de distribución de las dimensiones de las 744 fotolíneas, resultando (figura 4) ser ésta muy próxima a la log-Normal supuesta (con un factor de $\chi^2 = 12'99$ con 13 grados de libertad y un nivel de significación de $0'4481$), presentando una media de $\mu = 55'54$ m., y una varianza de $\sigma^2 = 2485'91$ m². El resto de las características estadísticas de la red de lineamientos se presenta en la tabla II adjunta.

Esta red de fracturación puede ser analizada como una estructura compleja que se distribuye en el plano de forma aparentemente irregular. Si se desea, primero estudiar el comportamiento de esta estructura al cambio de escala, y segundo identificar si este comportamiento corresponde con el que muestran las estructuras fractales de tipo potencia (power law), pueden seguirse las técnicas que se han descrito en el apartado de análisis fractal de la red. La aplicación de la técnica de conteo de celdas parte, como fue descrito, de la superposición de una malla de tamaño ó diámetro de celda mínimo (escala mínima de muestreo ó longitud de la mínima lineación obtenida). En este paso, que correspondería con la primera iteración del MIBC (Método Inverso de Box Counting), presentado en Paredes (1995), debe de realizarse un estudio sobre todas las celdas i determinando la medida de la longitud total L_i de las fotolíneas que se encuentran dentro de cada una. Este proceso iterativo se repite, desrefinando sucesivamente, la malla superpuesta a la estructura, por duplicación de la escala, hasta que ésta alcance un tamaño próximo a la mitad del tamaño del área de estudio. De esta manera, y para cada escala, es posible determinar la precisión que se necesita para ubicar una fractura aplicando la ecuación (3) en

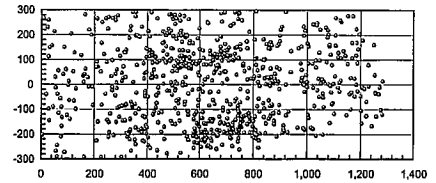


Fig. 5.- Distribución en el plano de los centros de las fotolíneas

Fig. 5.- Photoline center cloud of points.

función de la escala ó tamaño de la celda.

Otro tipo de análisis fractal que puede aplicarse al sistema es el que se ha denominado de agregación. Tal y como se expuso en el punto anterior, éste se fundamenta en el comportamiento de la distribución de masa (cantidad de fracturas) según la ecuación (5) en función del tamaño r (o escala) de un disco que recubre dicha estructura. Aplicando esta técnica sencilla a los datos de El Berrocal, y sobre diversos centros y tamaños de los discos, se ha obtenido una dimensión fractal que varía en un rango de $2'4$ a $1'4$, lo cual permite pensar en que la red estudiada no es del todo fractalmente homogénea en el espacio, sino que hay zonas con diferencias de densidad marcadas.

Análisis de la nube de puntos de soporte

Siempre y cuando la técnica de simulación del medio fracturado siga la metodología de utilizar un proceso de puntos para apoyar los planos ó fracturas, finitos ó infinitos, el análisis del sistema de fracturación debe de realizarse utilizando los centros de tales. De ésta manera se muestra cómo el análisis debe de ser acorde con la simulación de la disposición espacial de la nube de éstos puntos, y aún más si se tiene en cuenta cómo es el proceso de puntos. Esta nube de puntos, formada por los centros de las fracturas observadas, como se puede apreciar en la figura 5, es la estructura que se analiza cuando la simulación de las fracturas en el espacio se realiza apoyando el plano de fractura, de un tamaño determinado (finito o infinito) con una dirección y buzamiento, sobre un punto en el espacio. Si gracias al análisis de los puntos es posible definir su estructura espacial y cómo cambia ésta con la escala de forma fractal, ó según una ley de potencia, será posible utilizar tanto los resultados cómo su interpretación para crear su modelo conceptual fractal, y proceder a simularlo como corresponde adecuadamente a ésta estructura distribuida en el espacio.

Como primera técnica de análisis se puede utilizar la de conteo de celdas, o box-counting, en la que, como se expuso anteriormente, se determina, para cada escala de trabajo o tamaño de celda, el número de celdas que contienen al menos un punto en su interior. El resultado se muestra gráficamente en la figura 6. El rango de escalas barrido ocupa desde el metro a los seiscientos metros, que sería el tamaño de la mayor celda utilizada. Se puede comprobar cómo dentro de éste rango el comportamiento de

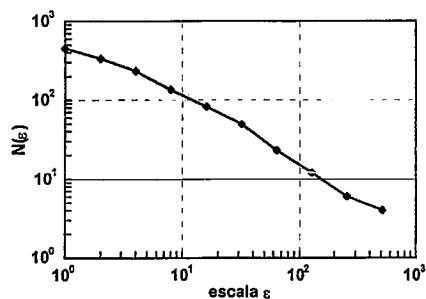


Fig. 6.- Resultado de aplicar la técnica de box-counting, mediante MIBC.

Fig. 6.- Log-Log plot from box-counting computing with MIBC.

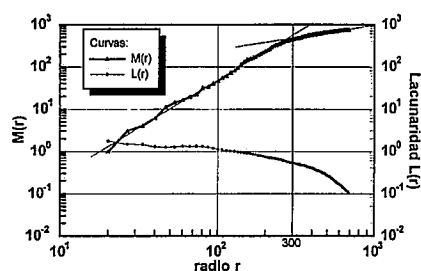


Fig. 7.- Resultado de aplicar la técnica de análisis de agregación.

Fig. 7.- Log-Log plot from aggregation mass technique computing.

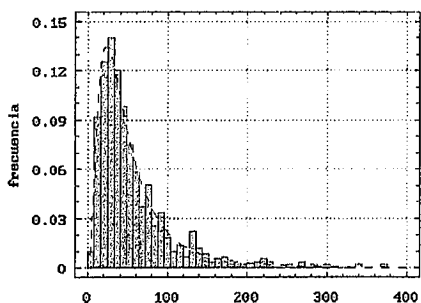


Fig. 8.- Histograma muestral de los tamaños utilizados en la simulación.

Fig. 8.- Sample histogram from the size fracture data used in the simulations.

la variable $N(\epsilon)$ corresponde con gran aproximación al de tipo potencia. Por lo tanto se puede afirmar que mediante este análisis es posible conceptualizar la nube de puntos de soporte como un conjunto finito de puntos con distribución fractal. Además y, debido a que en éstas estructuras se puede medir el grado de irregularidad de su distribución mediante la dimensión fractal, el ajuste ha permitido obtener una dimensión fractal de recubrimiento de 0'79, la cual da una idea de que la nube de puntos se extiende por casi todo el plano, sin llegar a llenarlo y, en un principio, de manera homogénea, sin formar agrupaciones claras.

Igualmente se ha realizado un análisis de agregación de los puntos, mediante el estudio de su distribución de masa en el plano, calculando $M(r)$ y la función de lacu-

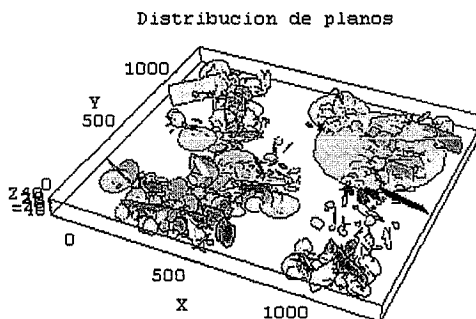


Fig. 9.- Simulación de 700 fracturas en 3D, y secciones, según el método Box.

Fig. 9.- Box method simulation, 700 fractures in 3D, two dimensional horizontal cut.

naridad $L(r)$. El resultado de éstas operaciones se presentan en la gráfica de la figura 7. Ahora si es posible apreciar cómo los puntos entre las escalas de 300 m. y aproximadamente 700 m. se agrupan formando cúmulos de puntos con distribución fractal de elevada dimensión, prácticamente 2'0, lo cual permite afirmar que son procesos de tipo Poisson. Por lo tanto, mediante este análisis es posible determinar el tamaño de las agrupaciones de las fracturas a pequeña escala, según sus centros, y que en el caso de El Berrocal, estos corresponden con unos 300 m. A su vez estos grupos de Poisson (con dimensión fractal de agregación de 2'0), se colocan en el espacio con una distribución de tipo fractal con dimensión de agregación 0'61.

Simulaciones del macizo fracturado.

Siguiendo la metodología de los planos finitos orientados apoyados en una nube de puntos de soporte, en las simulaciones efectuadas, se ha creído oportuno el utilizar, primero para las direcciones de buzamiento de los planos una función de distribución uniforme entre $N0^\circ E$ y $N180^\circ E$, y segundo también una función de distribución uniforme para los buzamientos, entre 0° y 90° . La función de distribución de los tamaños se ha escogido como log-Normal, cuya estructura se muestra en la figura 8, comparada con la que poseían los datos.

La simulación aquí presentada (figura 9) ha sido realizada utilizando la técnica denominada box. Por su formulación los datos que deben de ser utilizados son los obtenidos del análisis con el MIBC, la dimensión fractal a aplicar debe de ser la de recubrimiento, del orden de 0'79. Pero como lo que se ha analizado es una sección (o en su defecto una proyección) del espacio tridimensional, y se va a generar el campo en 3D, se tomará una $D = 1'79$. Mediante la utilización de esta técnica lo que se ha recogido es la dimensión de las agrupaciones de los centros de las fracturas, aunque modificada por su distribución interna, que en la realidad ha sido identificada con un proceso de Poisson.

Agradecimientos

El trabajo de investigación expuesto esta siendo realizado y subvencionado dentro del Convenio DMAMI (E.T.S.I de Minas) - ENRESA n°0700443 como parte del Proyecto de Investigación denominado Desarrollo de modelos numéricos para la simulación de procesos que tengan lugar en la geosfera; área de Simulación del medio geológico. Igualmente se desea agradecer a CIEMAT los datos de la fotointerpretación de El Berrocal utilizada en esta investigación.

Referencias

Aviles, C.A.; Scholz, C.A.; Boatwright, J. [1987] Journal of Geophysical Research 92: 331-334.
 Barton, C.C.; La Pointe, P.R. [1995] Plenum Press. New York.
 Barton, C.C.; La Pointe, P.R. [1995] Plenum Press. New York.
 Campos, R.; Gumiel, P.; Pardillo, J. [1995] Boletín Geológico y Minero 106-6
 Chiles, J.P. [1989] Geostatistics 1: 57-76.
 de la Cruz, B.; Rivas, P.; Campos, R.; Marín, C.; et al. [1995] Segundas Jornadas de I+D ENRESA. Madrid.
 Dersowitz, W.; Redus, K.; Wallmann, P.; LaPointe, P.; Axelsson, C.-L. [1992] SKB Technical Report 92-17.
 Falconer, K. [1990] John Wiley & Sons. Chichester.
 Feder, J. [1988] Plenum Press. New York.
 Gumiel, P.; Sanderson, D.J.; Roberts, S.; Campos, R. [1992] Geogaceta 2.
 Jacquin, C.G.; Adler, P.M. [1987] Transport in Porous Media 2: 571-596.
 Korvin, G. [1992] Elsevier. Amsterdam.
 Mandelbrot, B.B. [1986] L.Pietronero & E. Tosatti Editores. Elsevier Science Publishers.
 Paredes, C. [1995] Tesis Doctoral. Depto. Matemática Aplicada y Métodos Informáticos. E.T.S.I. de Minas. Madrid.
 Sahimi, M.; Imdakm, A.O. [1988] J. Phys. A. Math. Gen. 21(19): 3833-3870.
 Stoyan, D.; Stoyan, H. [1994] John Wiley & Sons. Chichester.
 Walsh, J.J.; Watterson, J. [1993] Journal of Structural Geology 15 (12): 1509-1512.